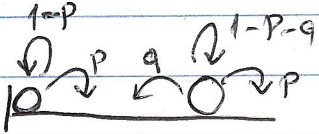
6/12/16

Οριακές Πιθανότητες τυχ. περιπάτου με 1 φράγμα ανάκλασης στο 0.



Έστω X_n σ.δ. που περιγράφει την κίνηση του σωματιδίου. Είναι σ.δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων. Μαρκοβιανή Ιδιότητα, Ομογενής, Μαρκ. Αλυσίδα Μη-Διαχ.

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \hline 0 & 1-p & p & 0 & 0 & \\ 1 & q & 1-p-q & p & 0 & \\ 2 & 0 & q & 1-p-q & p & \\ 3 & & & \cdots & & \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

Απεριοδική →

Θα χρησιμοποιήσουμε το αντίστροφο του Θ. Foster για να εξετάσουμε πότε είναι θετ. επαν.

$$x = x \cdot P \Rightarrow (x_0 \ \ x_1 \ \dots) = (x_0 \ \ x_1 \ \dots) \cdot P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = x_0(1-p) + x_1 \cdot q \Rightarrow \boxed{x_1 = (p/q)x_0} \\ x_1 = x_0 \cdot p + x_1(1-p-q) + x_2 \cdot q \Rightarrow \boxed{x_2 = (p/q)^2 x_0} \\ \vdots \\ \boxed{x_i = (p/q)^i x_0} \end{cases}$$

Άρα $x = \left(x_0, \frac{p}{q}x_0, \left(\frac{p}{q}\right)^2 x_0, \dots\right)$

- Για $x_0 \neq 0$ είναι οι συνιστώσες $\neq 0$.
- $\sum x_i < \infty \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} (p/q)^i x_0 < +\infty$

Επομένως είναι θετικώς επαν. αν $p/q < 1$

– Αν $p \geq q$ τότε όχι θετικώς επαν. $\Rightarrow$ οριακές πιθ. $= 0$.

– Αν $p/q < 1 \Rightarrow$ θετικώς επαν. και $\Pi = c \cdot x$ με c: σταθ. ώστε $\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i = 1$ και x: μία λύση του $x = x \cdot P$, με $x_0 \neq 0$.

Έστω $x = (1, p/q, (p/q)^2, \dots)$

$$\sum \Pi_i = 1 \Rightarrow c \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} (p/q)^i}_{\frac{1}{1-\lambda},\ \mu\varepsilon\ \lambda = p/q} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1 - p/q}$$

Άρα $\Pi_i = (1-p/q)(p/q)^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Τυχαίος Περίπατος με 2 φράγματα απορρόφησης

Έστω ένας τυχ. περίπατος που περιγράφεται ως εξής: Η αρχική του θέση είναι: $x_0 = 0$. Η θέση του μετά από n-το πλήθος-βήματα δίνεται ως το άθροισμα n-μετατοπίσεων.

$$x_n = Y_1 + \dots + Y_n$$

όπου Y_i, $i = 1, \dots, n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $EY_i = \mu$, $Var\,Y_i = \sigma^2$ και $g(s) = E[e^{sY}]$, $s \in \mathbb{R}$

Έστω X_T η τ.μ. που παριστάνει τη θέση της σ.δ. κατά τη χρονική στιγμή της απορρόφησης. Άρα T είναι η τ.μ. που παριστάνει το χρόνο μέχρι την απορρόφηση σε ένα

εκ των 2 σημείων απορρόφησης έστω $-b, \alpha$ με $b, \alpha > 0$.
Ισχύει τότε το Θεώρημα Wald σύμφωνα με το οποίο:
$E[g(s)^{-T} \cdot e^{X_T \cdot S}] = 1, \forall s \in S \subseteq \mathbb{R}$.
Σκοπός μας σε όσα ακολουθούν είναι νδο:
(i) P(τελικής απορρόφησης) = 1
(ii) Να προσδ. πιθανότητες απορρόφησης στα $-b$ κ' α.
(iii) Να προσδ. το μέσο χρόνο απορρόφησης.

(i) P(τελ. απορ.) = 1 − P(κινείται απεριόριστα)
P(κινείται απεριόριστα) $= P(-b < X_n < \alpha) \leq P(-b < X_n^* < \alpha)$
όπου X_n^* = η σ.δ. που ελεύθ. απλού. τυχ. περ.
Από κεντρικό οριακό Θεώρημα: $X_n^* = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, όπου Z_i τ.μ. με
$P(Z = z_i) = \begin{cases} p, & z = 1 \\ q, & z = -1 \\ 1-p-q, & z = 0 \end{cases} \simeq \Phi\left(\frac{\alpha - n\mu_1}{\sqrt{n\sigma_1^2}}\right) - \Phi\left(\frac{-b - n\mu_1}{\sqrt{n\sigma_1^2}}\right)$
όπου $\mu_1 = EZ_i = p - q$, $\sigma_1^2 = \mathrm{Var} Z_i = EZ_i^2 - (EZ_i)^2$
$EZ_i^2 = p + q$
Για $\mu_1 = 0 \xrightarrow{n \to +\infty} \Phi(0) - \Phi(0) = 0$
$\mu_1 > 0 \xrightarrow{n \to \infty} \Phi(-\infty) - \Phi(-\infty) = 0$
$\mu_1 < 0 \xrightarrow{n \to \infty} \Phi(+\infty) - \Phi(+\infty) = 0$
Άρα τελικά $\boxed{P(\text{τελ. απορ}) = 1} \Rightarrow$

(ii)
$\Rightarrow \boxed{P(\text{απορ. στο } -b) + P(\text{απορ. στο } \alpha) = 1}$ (*)

Η X_T έχει δυνατές τιμές $\alpha, -b$. Άρα (*) $\Rightarrow \boxed{P(X_T = -b) + P(X_T = \alpha) = 1}$

$Eh(X_T) \overset{X_T = \alpha, -b}{=} h(\alpha) \cdot P(X_T = \alpha) + h(-b) P(X_T = -b)$
$g(s) = E[e^{sy}]$
$g(0) = E[1] = 1$. $\exists s_0 \neq 0$ με $g(s_0) = 1$?
Έστω $\exists s_0 \neq 0$ με $g(s_0) = 1$. Τότε από Θ. Wald:
$E[\cancel{g(s_0)}^{-T} e^{X_T s_0}] = 1 \Rightarrow E[e^{X_T s_0}] = 1 \Rightarrow$
1
$\Rightarrow \boxed{e^{s_0 \cdot \alpha} \cdot P(X_T = \alpha) + e^{-s_0 \cdot b} P(X_T = -b) = 1}$ (**)
Άρα $e^{s_0 \alpha} P(X_T = \alpha) + e^{-s_0 b}(1 - P(X_T = \alpha)) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{P(X_T = \alpha) = \frac{1 - e^{-b s_0}}{e^{s_0 \alpha} - e^{-s_0 b}}}$, $\boxed{P(X_T = -b) = \frac{e^{\alpha s_0} - 1}{e^{\alpha s_0} - e^{-s_0 b}}}$

Όταν $\not\exists s_0 \neq 0$ τ.ω. $g(s_0)=1$ τότε

$$P(X_T=\alpha) = \lim_{s_0 \to 0} \frac{1-e^{-bs_0}}{e^{s_0\alpha}-e^{-s_0 b}} = \frac{b}{\alpha+b}$$

$$P(X_T=-b) = \lim \frac{e^{\alpha s_0}-1}{e^{\alpha s_0}-e^{-s_0 b}} = \frac{\alpha}{\alpha+b}.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Όταν $\mu = EY \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists s_0 \neq 0) : g(s_0)=1.$

(iii) Μας ζητάει $ET=;$

$$E[g(s)^{-T} e^{X_T S}] \Rightarrow \frac{dE[\,]}{ds} = \frac{d1}{ds} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[-T g(s)^{-T-1} g'(s) e^{X_T S} + g(s)^{-T} X_T e^{X_T S}] = 0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\boxed{s=0}} E[-T g'(0) + X_T] = 0 \Rightarrow E(-T\mu + X_T) = 0$$

$g(0)=1$

$$g(s) = E(e^{sY}) \Rightarrow g'(s) = E(Ye^{sY}) \Rightarrow \boxed{g'(0) = E(Y) = \mu}$$

Άρα $\mu ET = EX_T \Rightarrow \boxed{ET = \frac{EX_T}{\mu} = \frac{\alpha P(X_T=\alpha) - bP(X_T=-b)}{\mu}}$

Αν $\mu = 0 \Rightarrow \boxed{ET = \frac{EX_T^2}{\sigma^2}}$ (χωρίς απόδειξη).

Αφού $Eh(X_T) = h(\alpha) P(X_T=\alpha) + h(-b) P(X_T=-b)$

τότε $EX_T^2 = \alpha^2 P(X_T=\alpha) + (-b)^2 P(X_T=-b)$

$$\frac{b}{\alpha+b} \qquad\qquad \frac{\alpha}{\alpha+b}$$

Άρα τελικά:

$$P(X_T=\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-bs_0}}{e^{\alpha s_0}-e^{-s_0 b}}, & s_0 \neq 0 : g(s_0)=1 \\ & \mu \neq 0 \\ \dfrac{b}{\alpha+b}, & s_0 = 0 \;(\mu = 0 \end{cases}$$

$$P(X_T=-b)=\begin{cases}\dfrac{e^{s_0\alpha}-1}{e^{s_0\alpha}-e^{-s_0 b}}\\[2mm] \dfrac{\alpha}{\alpha+b}\end{cases}$$

$$ET=\begin{cases}\dfrac{EX_T}{\mu}, & \mu\neq 0\\[2mm] \dfrac{EX_T^2}{\sigma^2}, & \mu=0\end{cases} \qquad \text{όπου } g(s)=E(e^{sy})$$

Τυχαίος Περίπατος με 1 φρ. απορρόφησης στο α και $X_0=0$.

$P(\text{απορ. στο } \alpha)=;=\lim\limits_{b\to\infty} P(\text{απορ. στο } \alpha \text{ όταν έχω 2 φράγματα } \alpha, -b)=$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1-e^{-bs_0}}{e^{s_0\alpha}-e^{-bs_0}} \begin{cases}\xrightarrow{s_0>0} \dfrac{1}{e^{s_0\alpha}}\\[2mm] \xrightarrow{s_0<0} \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{s_0 e^{-bs_0}}{s_0 e^{-bs_0}}=1\end{cases}\\[6mm] \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{b}{\alpha+b}=1, \quad \mu=0\end{cases}$$

$P(\text{απορ. στο } -b)=\lim\limits_{\alpha\to\infty} P(\text{απορ. στο } -b \text{ όταν έχω 2 φρ. } \alpha, -b)=$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{\alpha\to\infty}\dfrac{e^{s_0\alpha}-1}{e^{s_0\alpha}-e^{-s_0 b}} \begin{cases}\xrightarrow{s_0>0} \lim\limits_{\alpha\to\infty}\dfrac{\alpha e^{s_0\alpha}}{\alpha e^{s_0\alpha}}=1\\[2mm] \xrightarrow{s_0<0} \dfrac{1}{e^{-s_0 b}}=e^{s_0 b}.\end{cases}\\[6mm] \lim\limits_{\alpha\to\infty}\dfrac{\alpha}{\alpha+b}=1\end{cases}$$

Άσκηση 19) Παίκτης ξεκινάει να παίζει ένα τυχ. παιχνίδι με 10€. Σε κάθε μονομαχία κερδίζει ή χάνει 1€ με πιθ. $P(\text{χάσει } 1€)=1/3$ και $P(\text{κερδίσει } 1€)=1/2$. Το παιχνίδι σταματάει όταν τα χρήματά του γίνουν 0€ ή 15€.

Λύση. Έστω X_n η σ.δ. που περιγράφει το κέρδος του παίκτη μετά το n-οστό παιχνίδι με $X_0=0$. Πρόκειται για τυχ. περίπατο με 2 φράγματα απορρόφησης στο $5=\alpha$ και στο $-10=-b$ δηλαδή $\alpha=5$ και $b=10$.

$X_n=Y_1+Y_2+\dots+Y_n$ όπου Y_i το κέρδος του παίκτη στο i-οστό παιχνίδι με EY_i με $P(Y_i=y)=\begin{cases}1/2=p, & y=1\\ 1/3=q, & y=-1\\ 1-1/2-1/3, & y=0\end{cases}$

$E(y_i) = 1\cdot p + (-1)\cdot q + 0\cdot(1-p-q) = p-q$

$Var(y_i) = E y_i^2 - (E y_i)^2$

$E y_i^2 = p(1)^2 + p(-1)^2 + 0^2(1-p-q)$

$g(s) = E(e^{sy}) = e^{s(-1)}\cdot q + e^{s\cdot 0}\cdot(1-p-q) + e^{s\cdot 1}\cdot p =$

$= p e^{s} + q e^{-s} + (1-p-q)$

— Αποδεικνυω απο θεωρια ότι P(τελ. απορ) $=1$.

— λύνω την $g(s)=1 \Rightarrow p e^s + q e^{-s} + (\cancel{1}-p-q) = \cancel{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow p(e^s)^2 - (p+q)e^s + q = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2 p - (p+q)\lambda + q = 0}$

$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ q/p \end{cases} \Rightarrow e^{s_0} = \begin{cases} 1 \\ q/p \end{cases} \Rightarrow s_0 = \begin{cases} 0 \\ \ln\frac{q}{p} \neq 0 \end{cases}$

διότι $q \neq p$

$\exists s_0 \neq 0$, $s_0 = \ln q/p$, για το οποίο το $g(s_0)$ κάνει 1 για αυτό θα εφαρμόσω το Θ. Wald (βλ. θεωρία) και θα καταλήξω στις σχέσεις που είδαμε για $P(x_T = a)$ $P(x_T = -b)$ και μας ζητάει το $P(x_T = -b)$ για $s_0 = \ln\frac{q}{b}$

Ασκ.: 41, 45, 48 (εκτός από το τελευταίο ερώτημα).